SVEČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI DIPOLMSKI STUDIJ

Kolegij:

Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Studentica:

Morana Česnik

Seminar:

LOGISTIČKI MODEL

Zagreb, lipanj 2010.

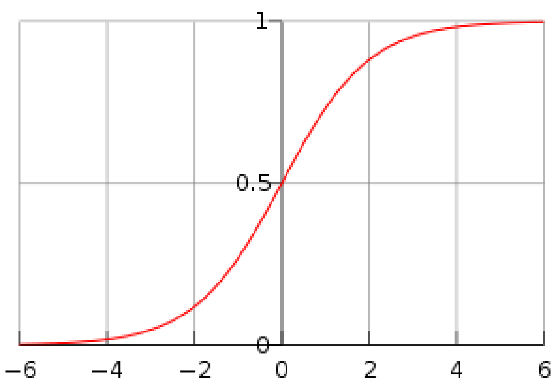
Veličina populacije *P* koja se mijenja s vremenom *t* ne može rasti konstantnom stopom rasta. Eksponencijalni model je prikladan kada u sustavu nema nikakvog ograničenja. Pri razmatranju populacije u zatvorenoj sredini uzima se u obzir postojanje određenog limita. Stopa rađanja populacije s vremenom počinje opadati, a stopa umiranja rasti.

Najjednostavniji model smanjenja stope rađanja i povećanja stope umiranja predložio je 1838. godine Pierre-Francois Verhulst koji uključuje stopu rađanja te stopu umiranja. Stopa rađanja pada proporcionalno napučenosti, a stopa umiranja raste proporcionalno napučenosti.

Jednostavna logistička funkcija opisana je formulom

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

gdje *P* označava populaciju, a varijabla *t* vrijeme. Za vrijednosti *t* u intervalu realnih brojeva od minus beskonačnosti do beskonačnosti, graf je S – krivulja.



Slika 1. Krivulja logističke funkcije

U praksi, zbog prirode eksponencijalne funkcije e^{-t}, dovoljno je izračunati *P(t)* za mali interval realnih brojeva, primjerice [-6,+6].

Početna faza rasta približno je eksponencijalna, zatim kako zasićenje počinje, usporava rast, te u zreloj fazi rast se zaustavlja.

Derivacija logističke funkcije jednostavno se izračuna i iznosi:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \cdot (1 - P(t))$$

Funkcija od *P* intuitivno ima svojstvo

$$1 - P(t) = P(-t)$$

Logistička diferencijalna jednadžba

Logistička funkcija je rješenje jednostavne nelinearne jednadžbe prvog reda

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)(1 - P(t))$$

gdje je *P* varijabla ovisna o vremenu i s početnim uvjetom $P(0) = ½$. Rješenje je

$$P(t) = \frac{e^t}{e^t + e^c}$$

Ako se kao konstanta integracije uzme $e^c = 1$, dobiva se druga poznata forma logističke krivulje

$$P(t) = \frac{e^t}{e^t + 1} = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

Logistička krivulja pokazuje rani eksponencijalni rast kada je t negativan, koji se usporava prema linearnom rastu nagiba ¼ blizu $t = 0$, pa se približava $y = 1$ s eksponencijalnim padom.

Modeliranje rasta populacije u ekologiji

Česta primjena logističke funkcije je upravo za modeliranje rasta populacije, za što ju je izvorno koristio i Pierre-Francois Verhulst 1838. godine, pri čemu je stopa razmnožavanja razmjerna postojećoj populaciji i količini raspoloživih resursa. Verhulstova jednadžba je objavljena nakon što je Verhulst pročitao djelo Thomasa Malthusa *Esej o principima populacije*. Verhulst je izveo svoju logističku jednadžbu kako bi opisao samoograničavajući rast biološke populacije. Jednadžba se ponekad naziva Verhulst – Perlovom jednadžbom. Alfred J. Lotka je 1920. godine ponovno izveo izraz nazvavši ga *zakonom o rastu populacije*.

U diferencijalnoj jednadžbi koja slijedi *P* predstavlja veličinu populacije, *t* vrijeme, *r* stopu rasta, a *K* nosivi kapacitet - maksimalnu veličinu koju populacija može doseći.

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

U jednadžbi je rana, početna stopa rasta modelirana prvim izrazom + *rP*. Vrijednost *r* predstavlja proporcionalan rast populacije *P* u jedinici vremena. Nadalje, kako populacija raste, drugi član – rP^2 / K (po ovom članu vidimo da je logistički model kvadratni model) postaje veći od prvog kako se neki članovi populacije *P* natječu oko nekih važnih resursa, na primjer hrane ili životnog prostora. Taj antagonistički efekt nazvan je *bottleneck* i modeliran je vrijednošću parametra *K*. Natjecanje umanjuje stopu rasta sve dok vrijednost *P* prestane rasti, odnosno sve dok ne dođe do zrelosti populacije.

Dijeljenjem obiju strana izraza s *K* dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\frac{P}{K} = r\frac{P}{K}\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Uvrstimo $x = P/K$ i dobijemo:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$$

Za $r = 1$ dobivamo početni izraz.

Drugi način izvođenja izraza za logistički model jest da se uvrste stopa rađanja *r* i stopa umiranja *u*.

$$\mathbf{r = r_0 - aP}$$

$$\mathbf{u = u_0 + bP}$$

Stopa rađanja pada proporcionalno napučenosti, odnosno veličini populacije *P*, dok stopa umiranja raste proporcionalno napučenosti. U tom modelu za rast populacije *P* vrijedi:

$$dP = (r-u)\,P\,dt = [(r_0 - aP) - (u_0 + bP)]\,Pdt = [(r_0 - u_0) - (a+b)P]\,Pdt =$$

$$= (r_0 - u_0)\left[1 - \left(\frac{a+b}{r_0 + u_0}\right)P\right]Pdt.$$

Konstante r_0 i u_0 su početne stope rađanja i umiranja, a njihova je razlika $k_0 = r_0 - u_0$ početna stopa rasta. Konstante *a* i *b* su stope po kojima stopa rađanja pada, odnosno stopa umiranja raste. Pomoću njih se nosivi kapacitet izražava kao:

$$K = \frac{r_0 - u_0}{a+b}$$

$$dP = k_0 \left(1 - \frac{P}{K}\right) P\, dt$$

Slijedi da je $dP > 0$ samo za $P < K$ (uz $k_0 > 0$). Dakle, za $P < K$ populacija raste prema K i rast prestaje tek kada je $dP = 0$, tj. kada je $P = k$. Slično, $dP < 0$ samo za $P > K$ (uz $k_0 > 0$). Dakle, populacija pada samo za $P > K$ i pad prestaje tek kada je $dP = 0$, tj. kada je $P = K$. Što je populacija bliže nosivom kapacitetu, to je rast sporiji.

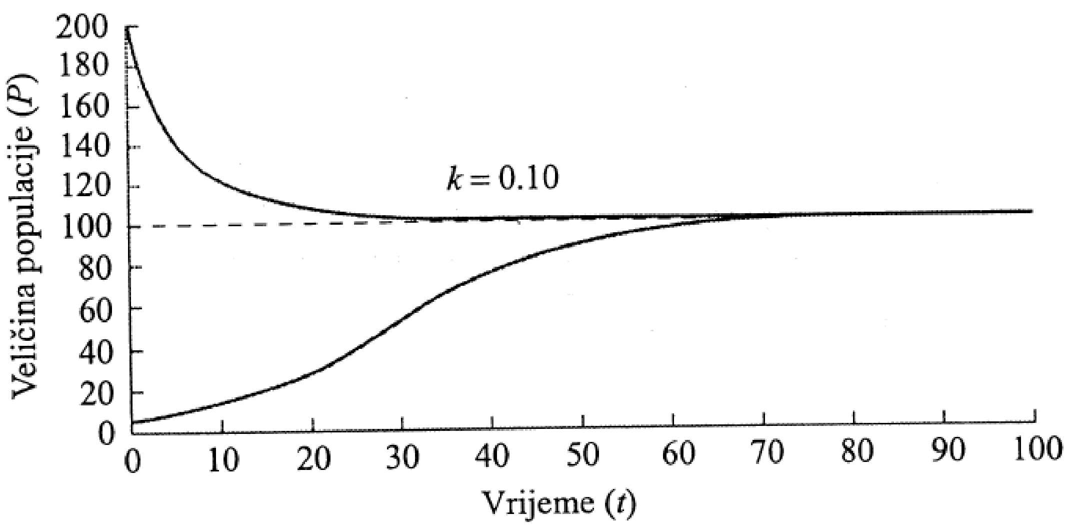
Primjerice, za K = 100 i dosta udaljeni P = 1 imamo

$$dP = k_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right) P\, dt = 0.99\ k_0\ P\ dt,$$

I to je rast po stopi 0.99 k_0, dok za P = 99, što je dosta blizu nosivom kapacitetu K = 100 imamo

$$dP = k_0 \left(1 - \frac{99}{100}\right) P\, dt = 0.01\ k_0\ P\ dt,$$

i to je rast po bitno manjoj stopi 0.01 k_0. To se može vidjeti na S – grafu koji pregledno pokazuje ovaj tip rasta:



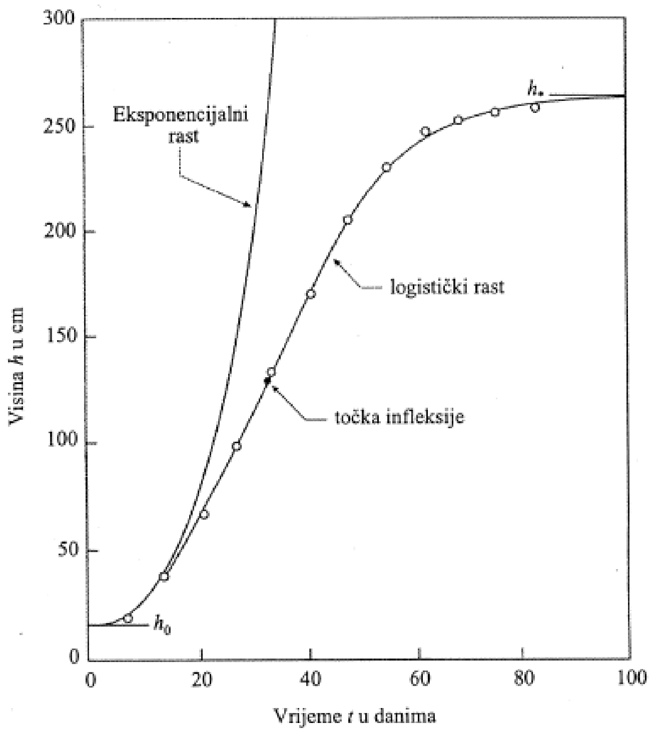
Slika 2. Krivulja logističkog rasta

Graf od *P* raste u vremenu na karakterističan S – način u slučaju kada populacija počne ispod nosivog kapaciteta. Kada populacija počne iznad nosivog kapaciteta, krivulja naglo pada na točku ekvilibrijuma. U ovom je primjeru K = 100, a populacija počinje s 5, odnosno 200 jedinki.

Za populaciju koja ima konstantnu stopu rasta k, odnosno za koju je $dP = kPdt$, egzaktna formula rasta glasi $P = P_0e^{kt}$. Koristeći se tehnikama integralnog računa, takvu egzaktnu formulu rasta možemo naći i za populaciju čija stopa opada po Verhulstovom načelu, tj. za koju je $dP = k_0 (1 – P/K) Pdt$ i čiji je S – graf prethodno prikazan. Ta se formula naziva logističkom, a njoj odgovarajući rast logističkim rastom:

$$P = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-k_0 t}}$$

Logistički je rast vrlo dobar matematički model za mnoge prirodne fenomene. Primjerice, ako se prati rast suncokreta od mladice do zrele biljke, vidi se da je on logistički. Na slici su prikazani točkama rezultati konkretnih mjerenja visine suncokreta tijekom tri mjeseca njegova rasta. Očito je da se rezultati mjerenja gotovo savršeno poklapaju s logističkim rastom. Na slici je prikazan i eksponencijalni rast kojim bi suncokret rastao da je zadržao svoju početnu stopu rasta.



Slika 3. Rast suncokreta

<u>Korekcija modela – useljavanje i iseljavanje</u>

Logistička jednadžba nije primjerena ako je u zadanoj populaciji prisutno useljavanje i iseljavanje, stoga je tada potrebna korekcija modela. Ako pretpostavimo da je iseljavanje linearno uz stalnu brzinu *a*, vrijedi pripadajuća korigirana jednadžba:

$$\frac{dP}{dt} = k_{\circ} P\left(1 - \frac{P}{K}\right) - a$$

Ako je $a > 0$, radi se o iseljavanju, za useljavanje vrijedi $a < 0$, a ako je $a = 0$ onda se radi o običnoj logističkoj jednadžbi.

Primjena logističke funkcije

Logistička funkcija nalazi primjenu u raznim područjima kao što su neuronske mreže, biologija, biomatematika, demografija, ekonomija, kemija, medicina, matematička psihologija, vjerojatnost, sociologija, političke znanosti i statistika.

Logistička funkcija je često korištena u neuronskim mrežama za prikazivanje nelinearnosti u modelu i za ograničavanje signala na unaprijed zadani raspon. Element neuronske mreže pretvara linearni ulazni signal u izlazni signal u obliku logističke funkcije s ograničenjima.

Logističke funkcije se koriste u statistici za logističku regresiju u cilju prikazivanja kako vjerojatnost nekog događaja P može biti pod utjecajem jedne ili više ulazne varijable.

U medicini se logistička funkcija koristi pri modeliranju rasta tumora po sličnom principu kao modeliranje rasta u ekologiji.

U kemiji se logistička funkcija može primijeniti za praćenje udjela reaktanata i produkata u vremenu u kemijskoj reakciji drugog reda.

U lingvistici se logistička funkcija primjenjuje pri modeliranju razvoja jezika. Inovacija u jeziku je u početku marginalna, ali s vremenom sve više zahvaća populaciju, te na kraju tog procesa ostaje vrlo mali postotak populacije koji nije usvojio tu promjenu jezika.

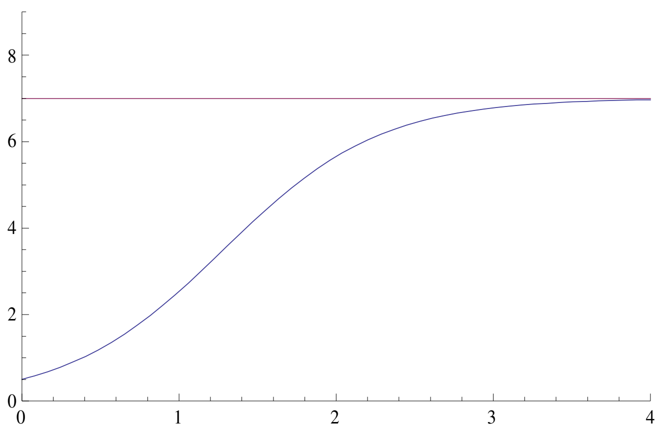
MODELIRANJE U MATHEMATICI

Primjer 1.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 0.5, a nosivi kapacitet 7, dobije se prikazani graf logističke funkcije s krivuljom S – oblika. Možemo ju interpretirati tako da populacija eksponencijalno raste sve do otprilike polovice vrijednosti nosivog kapaciteta, pa tada kao da se taj limit počinje osjećati te se krivulja polaganije približava vrijednosti nosivog kapaciteta.

Program:

```
k:=2
L:=7
x0:=0.5
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,4},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange □
{{0,4}, {0,9}}]
```



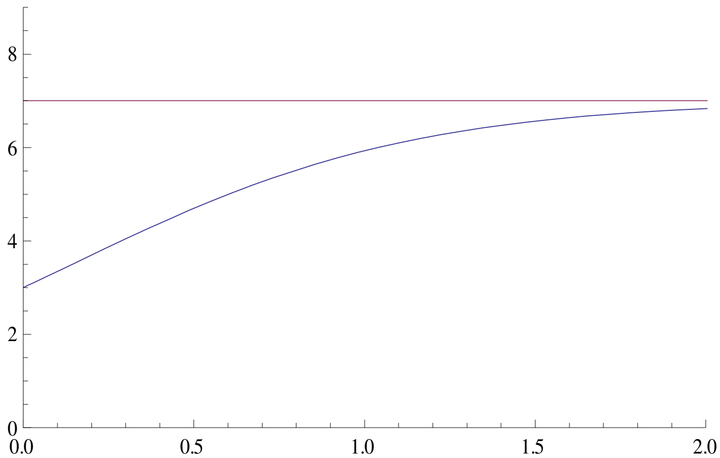
Primjer 2.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 3, a nosivi kapacitet 7, dobije se prikazani graf logističke funkcije. Populacija se približava vrijednosti nosivog kapaciteta i otprilike u vremenu 2 joj se maksimalno približi.

Program:

```
k:=2
L:=7
x0:=3
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
```

```
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange □
{{0,2}, {0,9}}]
```

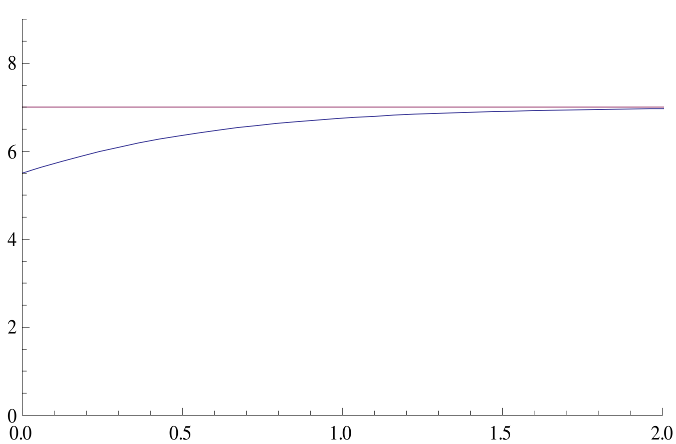


Primjer 3.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 5.5, a nosivi kapacitet 7, dobije se prikazani graf logističke funkcije.

Program:

```
k:=2
L:=7
x0:=5.5
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange □
{{0,2}, {0,9}}]
```

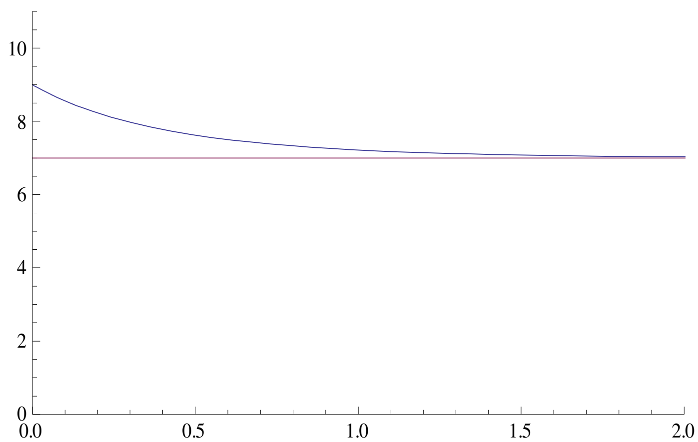


Primjer 4.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 9, a nosivi kapacitet 7, dobije se prikazani graf logističke funkcije. Početna veličina populacije je veća od nosivog kapaciteta, te se stoga njena vrijednost smanjuje ka njoj.

Program:

```
k:=2
L:=7
x0:=9
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange □
{{0,2}, {0,11}}]
```

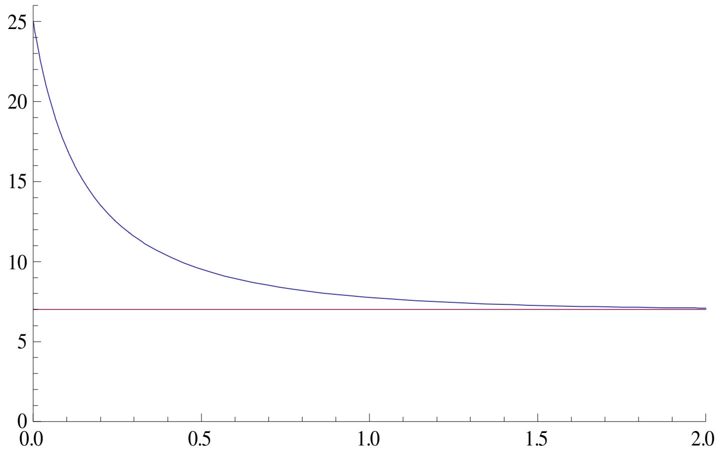


Primjer 5.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 25, a nosivi kapacitet 7, dobije se prikazani graf logističke funkcije.

Program:

```
k:=2
L:=7
x0:=25
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,2},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange □
{{0,2}, {0,26}}]
```

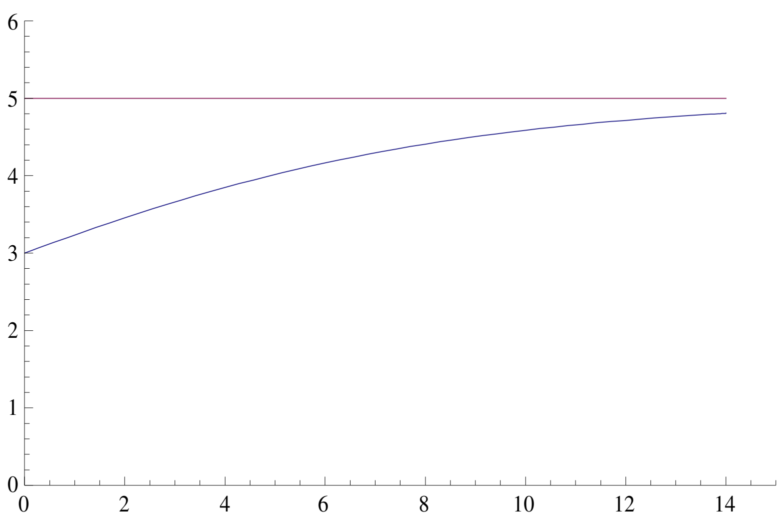


Primjer 6.

Kada stopa rasta iznosi 0.2, početna veličina populacije 3, a nosivi kapacitet 5, dobije se prikazani graf logističke funkcije.

Program:

```
k:=0.2
L:=5
x0:=3
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,14},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange□{{0,15},{0,6}}]
```

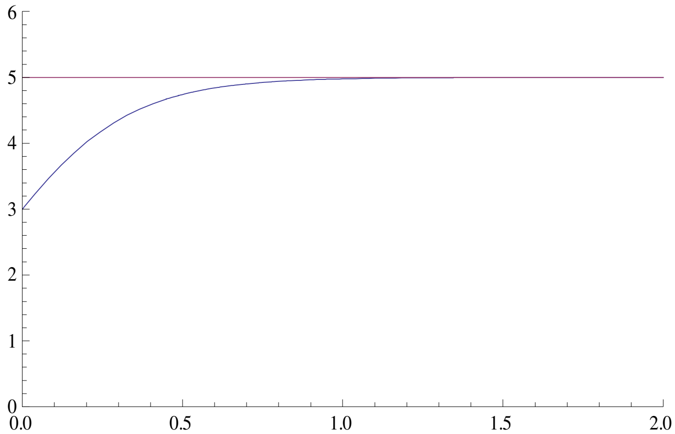


Primjer 7.

Kada stopa rasta iznosi 5, početna veličina populacije 3, a nosivi kapacitet 5, dobije se prikazani graf logističke funkcije.

Program:

```
k:=5
L:=5
x0:=3
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-
x[t]/L),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,2},AxesOrigin□{0,0},
PlotRange□{{0,2},{0,6}}]
```



Primjer 8.

Da podsjetimo, za logistički model s useljavanjem i iseljavanjem vrijedi

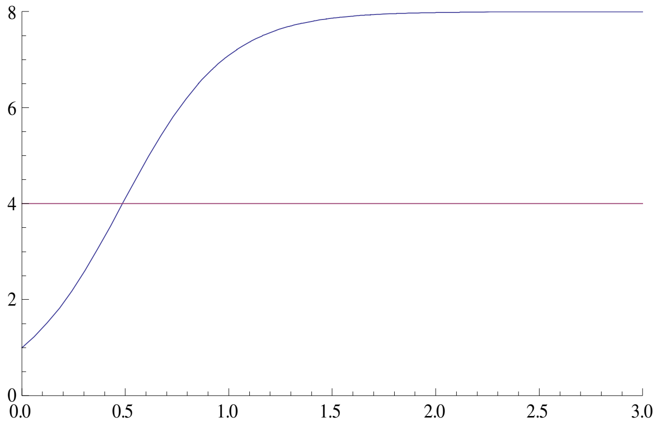
$$\frac{dP}{dt} = k_{\circ} P\left(1 - \frac{P}{K}\right) - a$$

pri čemu ako je $a > 0$, radi se o iseljavanju, za useljavanje vrijedi $a < 0$.

Kada stopa rasta iznosi 2, početna veličina populacije 1,nosivi kapacitet 4, a stalna brzina useljavanja |1| (odnosno 1 s negativnim predznakom jer se radi o useljavanju), dobije se prikazani graf logističke funkcije. U ovom slučaju veličina populacije znatno premašuje nosivi kapacitet jer je brzina useljavanja velika.

Program:

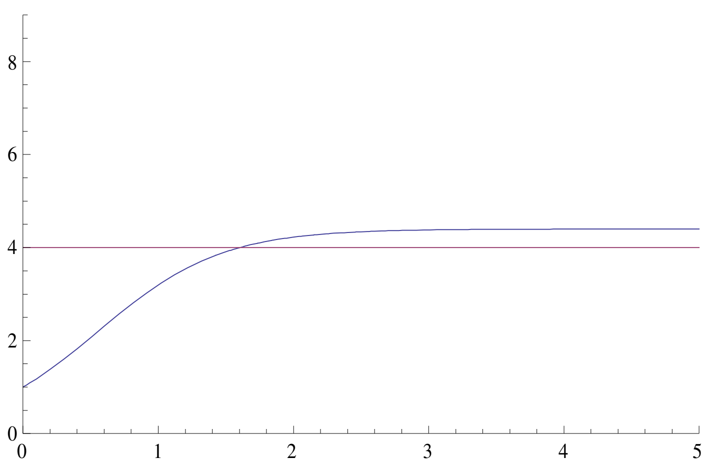
```
k:=2
L:=4
x0:=1
a := -1
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-
a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin→{0,0}, PlotRange→{{0,3},
{0,8}} ]
```



Primjer 9.

Brzina useljavanja je 10 puta manja u odnodu na prethodni primjer, te se može vidjeti da u ovom slučaju stacionarna veličina populacije nije značajno veća od nosivog kapaciteta.

```
k:=2
L:=4
x0:=1
a := -0.1
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,5},AxesOrigin□{0,0},
PlotRange□{{0,5},{0,9}}]
```

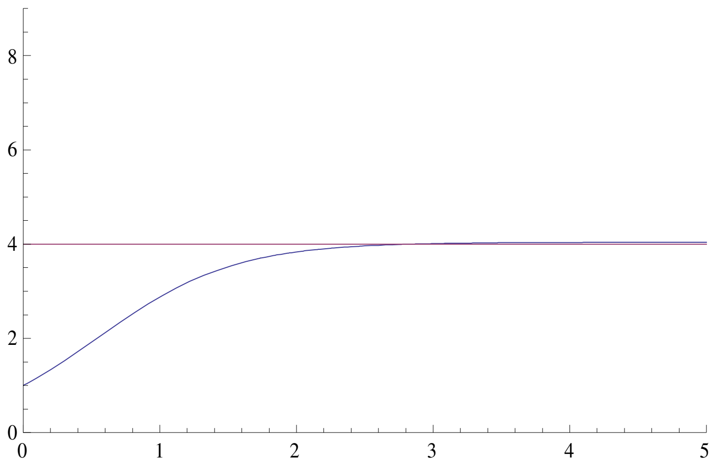


Primjer 10.

S dodatnim smanjenjem brzine useljavanja za 10 puta, stacionarna veličina populacije se preklapa s nosivim kapacitetom jer je brzina useljavanja premala da bi imala značajni utjecaj na veličinu populacije.

Program:

```
k:=2
L:=4
x0:=1
a := -0.01
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-
a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,5},AxesOrigin□{0,0},
PlotRange□{{0,5},{0,9}}]
```

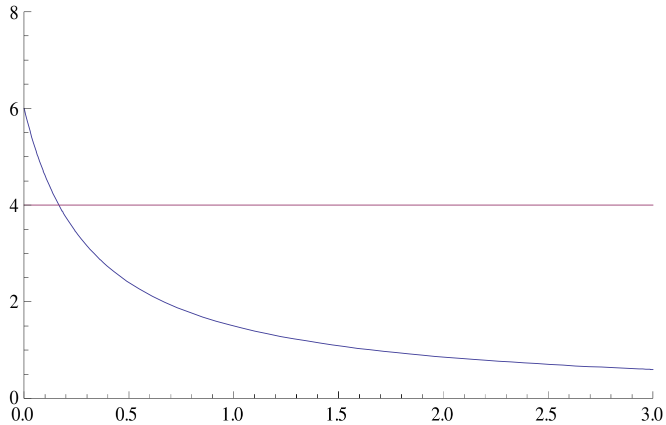


Primjer 11.

Za iseljavanja, pri čemu je vrijednost a pozitivna, dobiva se prikazano smanjenje veličine populacije.

Program:

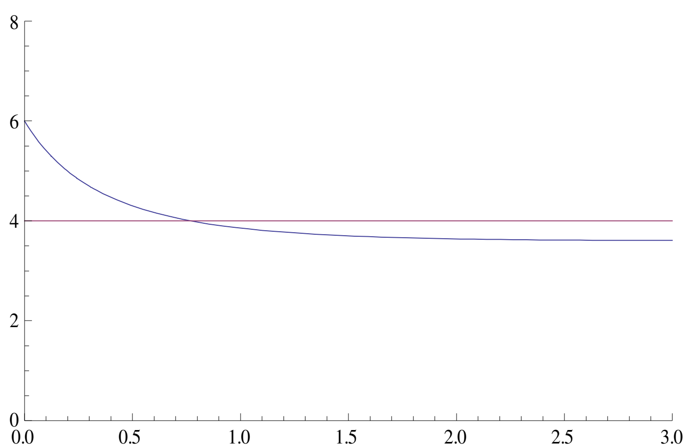
```
k:=2
L:=4
x0:=6
a := 1
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-
a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange□{{0,3},
{0,8}} ]
```



Primjer 12.

Program:

```
k:=2
L:=4
x0:=6
a := 0.1
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-
a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange□{{0,3},
{0,8}} ]
```

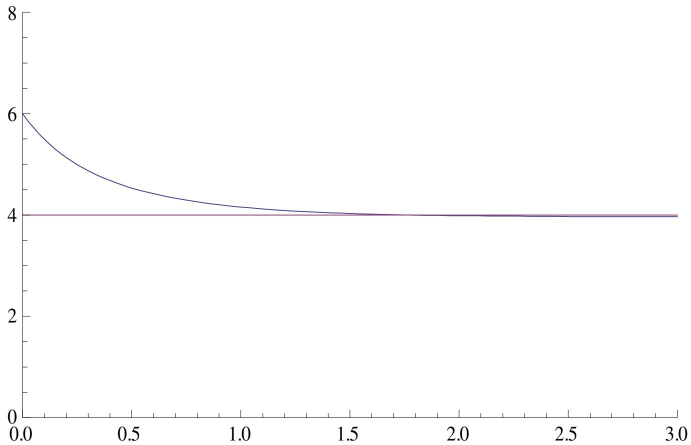


Primjer 13.

Program:

```
k:=2
L:=4
x0:=6
a := 0.01
```

```
rjesenje:=Evaluate[x[t]/.DSolve[{x'[t]□k*x[t]*(1-x[t]/L-
a),x[0]□x0},x,t]]
rjesenje
Plot[{rjesenje,L},{t,0,3},AxesOrigin□{0,0}, PlotRange□{{0,3},
{0,8}} ]
```



LITERATURA:

A. Uvod u matematičke metode u inženjerstvu – Eksponencijalni i logistički model, I. Gusić
B. Matematički modeli u ekologiji, Logistički model, I. Ćosić
C. www.wikipedija.org
D. Eksponencijalni i logistički rast, Z. Šikić